Exercice 1:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -7 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2:
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $AX = XA$.
   Or, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$E_{i,j}A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i^{\text{ème}} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

   et

$$AE_{i,j} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & j^{\text{ème}} & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,i} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

   Cela implique donc que, pour tout $i \neq j$, $a_{j,i} = 0$.
   De plus, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_{i,i} = a_{j,j}$. Donc $A = a_{1,1}I_n$ est une matrice scalaire.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(AX)^2 = 0$.
   Or, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,

$$E_{i,j}A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ i^{\text{ème}} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

   on obtient $a_{j,i}^2 = 0$. Donc $A = 0$.

Exercice 3: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   On va raisonner par analyse et synthèse.

- Analyse: Supposons qu'il existe $(S,A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec S symétrique et A antisymétrique tel que $M = S + A$.
  Donc $M^T = S^T + A^T = S - A$. D'où
  $$S = \frac{M+M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M-M^T}{2}.$$
  Si une telle décomposition existe, elle est unique.
- Synthèse: Posons
  $$S = \frac{M+M^T}{2} \text{ et } A = \frac{M-M^T}{2}.$$
  On a $M = S + A$, $S^T = S$ et $A^T = -A$.
- Conclusion Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe un unique couple $(S,A) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec S symétrique et A antisymétrique tel que $M = S + A$.

2. Soit $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
$$AB \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) \iff (AB)^T = AB \iff B^TA^T = AB \iff BA = AB$$

3. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$. Supposons que A soit inversible. On a $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$.
Donc A^{-1} est antisymétrique.

Exercice 4:
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc, pour tout $n \geq 2$, $A_2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$.
Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^2 = 3B$, donc, pour tout $n \geq 1$, $B^n = 3^{n-1}B = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^2 = 2C$, donc, pour tout $n \geq 1$, $C^n = 2^{n-1}C = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$.
Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, par récurrence, on montre que pour tout $n \geq 1$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E^3 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$, d'où pour tout $n \geq 3$, $E^n = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.

Exercice 5:
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. $J^0 = I_4$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \geq 4$, $J^n = 0_{\mathscr{M}_4(\mathbb{R})}$.

2. $(I_4 - J)(I + J + J^2 + J^3) = I_4$. Donc $I_4 - J$ est inversible et $(I_4 - J)^{-1} = I + J + J^2 + J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $M(a,b) = aI_4 + bJ$. Comme I_4 et J commutent, d'après le binôme de Newton,
$$M(a,b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bJ)^k (aI_4)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\min(3,n)} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k J^k \,.$$
Donc
$$M(a,b)^2 = a^2 I_4 + 2abJ + b^2J^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab & b^2 & 0 \\ 0 & a^2 & 2ab & b^2 \\ 0 & 0 & a^2 & 2ab \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix},$$
et, pour tout $n \geq 3$,
$$M(a,b)^n = a^n I_4 + na^{n-1}bJ + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2J^2 + \binom{n}{3} a^{n-3}b^3J^3 = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 & \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b & \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 \\ 0 & 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & 0 & a^n \end{pmatrix},$$

Exercice 6: Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On peut utiliser la formule du binôme de Newton car A et I_n commutent.
$$(A + I_2)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k = I_n + \left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \right) A = I_n + (2^p - 1)A$$

2. Posons $A = B - I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. On a $A^2 = A$. Donc $B = A + I_2$ avec $A^2 = A$. D'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$B^p = I_2 + (2^p - 1)A = \begin{pmatrix} 1 + 3(2^p - 1) & 6(2^p - 1) \\ -(2^p - 1) & 1 - 2(2^p - 1) \end{pmatrix}$$

Exercice 7:

Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{C} = \{M(a,b) \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$,
$$M(a,b)M(c,d) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & -(ad + bc) \\ (ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix} = M(ac - bd, ad + bc)\,.$$

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,
$$M(a,b)M(a,b)^T = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)I_2\,.$$
Donc $M(a,b)$ est inversible $\iff a^2 + b^2 \neq 0 \iff (a,b) \neq (0,0)$. Dans ce cas, $M(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

3. Soit
$$\begin{array}{cccc} \phi : & \mathcal{C} & \to & \mathbb{C} \\ & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} & \mapsto & a + \mathrm{i}b \end{array}.$$

Calculons, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(c,d) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi(M(a,b)M(c,d)) = ac - bd + \mathrm{i}(ad+bc)$$

et

$$\phi(M(a,b))\phi(M(c,d)) = (a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = ac - bd + \mathrm{i}(ad+bc)\,.$$

Donc, pour tout $(M,N) \in \mathcal{C}^2$, $\phi(MN) = \phi(M)\phi(N)$.
Par ailleurs, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\phi(M(a,b)^T) = a - ib = \overline{\phi(M(a,b))}$.

Exercice 8:
On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \phantom{x - {}} y + z - t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - t = 0 \\ x + y + z + t = 8 \end{cases}$$

D'après la méthode du pivot de Gauss, $x = 2$, $y = 1$, $z = 2$ et $t = 3$ où x est le poids de la marmotte, y celui de l'écureuil, z celui du hibou et t celui du loup.

Exercice 9:

$$\begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ 2x - y + 3z + t = 3 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases} \overset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ x - 2y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ -y + 2z - 2t = -2 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - y + z + t = 2 \\ y + z - t = -1 \\ 3z - 3t = -3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 0 \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Exercice 10: Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ x + 3y - 2z = 7 \\ 2x - 2y + a^2 z = a + 4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ 5y - 5z = 5 \\ 2y + (a^2 - 6)z = a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = 2 \\ y - z = 1 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

1. Si $a \notin \{-2; 2\}$, il y a une unique solution.
   Si $a = 2$, il y a une infinité de solutions.
   Si $a = -2$, il n'y a pas de solution.

2. Pour $a = 2$, $S = \{(4 - z, 1 + z, z), z \in \mathbb{R}\}$. Pour $a \notin \{-2; 2\}$, $S = \left\{\left(\frac{4a+7}{a+2}, \frac{a+3}{a+2}, \frac{1}{a+2}\right), z \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 11: Soit $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. On doit avoir : $\begin{cases} 8a = d \\ 18a = 2c \\ 2b = c + 2d \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} d = 8a \\ c = 9a \\ 2b = 25a \end{cases}$.
Les quadruplets (a, b, c, d) sont donc de la forme $(2t, 25t, 18t, 16t)$ où $t \in \mathbb{N}$.
D'où pour $t = 1$, $2C_8H_{18} + 25O_2 = 18H_2O + 16CO_2$.

Exercice 12:
Montrer que les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Grâce à la méthode du pivot de Gauss et au calcul de $C^2 = 6C - 5I_4$, on obtient :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -24 & 20 & -5 \\ 18 & -15 & 4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} \qquad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13: Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ des matrices colonnes génériques.

$$AX = B \iff \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \overset{\text{pivot de Gauss}}{\iff} \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 + 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ -b_1 + b_2 \\ 3b_1 - 2b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

En particulier, pour $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, le système n'a pas de solution donc A est non inversible.

Exercice 14: Notons x, y et z les nombres effacés des briques de gauche à droite de la base.
Ces inconnues vérifient :

$$\begin{cases} 7 + 2x + y = 47 \\ 47 + 2x + 4y + 2z + 53 = 182 \\ y + 2z + 23 = 53 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + y = 40 \\ x + 2y + z = 41 \\ y + 2z = 30 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 17 \\ y = 6 \\ z = 12 \end{cases}$$